Polynôme de Tchebychev et approximation uniforme

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes réels en l'indéterminée X. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur à $n \in \mathbb{N}$.

On identifiera polynôme et fonction polynomiale définie sur $[-1,1]$.

On rappelle que toute fonction réelle f continue sur $[-1,1]$ est bornée car continue sur un segment, on convient alors de noter $\|f\| = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ dont l'existence dans $\mathbb{R}$ est assurée par l'argument précédent.

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

1.a Simplifier $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ et $f_3(x)$.
Représenter sur un même graphique ces applications.

1.b Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et tout $x \in [-1,1]$:

$$f_{n+1}(x) = 2x f_n(x) - f_{n-1}(x)$$

1.c En déduire qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in [-1,1], T_n(x) = f_n(x)$$

Calculer T_0, T_1, T_2, T_3 et T_4.

2.a Quel est le degré de T_n ?
Quel est son coefficient dominant ?

2.b Déterminer les racines de T_n qui appartiennent à $[-1,1]$.
Combien y en a-t-il ?
Comment justifier que celles-ci sont simples et qu'il n'y en a pas d'autres ?

2.c Etudier la parité du polynôme T_n en fonction de la parité de l'entier n.

3.a Montrer : $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta)$.

3.b En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x| \le 1 \Leftrightarrow |T_n(x)| \le 1$.

On suppose désormais que n est un entier naturel non nul.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|T_n(x)| = 1$. On précisera le nombre de racines distinctes et la position relative des racines des équations $T_n(x) = 1$ et $T_n(x) = -1$.

5. On pose $\tilde{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$ et on note P_n l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ de degré exactement égal à n. Il est entendu que $\tilde{T}_n \in P_n$.

5.a Calculer $\|\tilde{T}_n\|$.
On désire établir que $\tilde{T}_n$ est un polynôme de P tel que la quantité $\|\tilde{T}_n\|$ soit minimale. Pour cela on raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe P polynôme appartenant à P_n tel que $\|P\| < \|\tilde{T}_n\|$.

5.b On pose $D = \tilde{T}_n - P$. Que dire du degré de D ?

5.c Etudier le signe de $D\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ et conclure.

Partie II

Soit n un entier naturel non nul et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des points deux à deux distincts du segment $[-1,1]$. On pose pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$: $L_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$.

1.a Quel est le degré de L_k ?

1.b Calculer $L_k(a_i)$ pour tout $i \in \{0,1\ldots,n\}$, $i \neq k$.
Calculer aussi $L_k(a_k)$.

1.c Montrer que la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On se donne une fonction réelle f définie sur $[-1,1]$, et on pose :

$$P = \sum_{k=0}^{n} f(a_k) L_k$$

Montrer que P est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in \{0,1,\ldots,n\}$: $P(a_i) = f(a_i)$. On dit que P est le polynôme interpolateur de la fonction f aux points $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

On désire maintenant évaluer la qualité de l'approximation réalisée lorsqu'on approche la fonction f par le polynôme P défini ci-dessus. Pour cela on suppose que f est une fonction de classe C^{n+1} et on pose $\Pi_{n+1} = \prod_{i=0}^{n} (X - a_i)$.

3. Soit $x \in [-1,1]$. On désire établir l'existence d'un $\xi \in [-1,1]$ tel que :

$$f(x) - P(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

3.a On suppose $x \in \{a_0, \ldots, a_n\}$. Etablir le résultat.

3.b On suppose $x \notin \{a_0, \ldots, a_n\}$ et on introduit la fonction F définie par :

$$F(t) = f(t) - P(t) - K\Pi_{n+1}(t)$$

avec K constante réelle choisie de sorte que $F(x) = 0$.
Justifier l'existence de la constante K et observer que F possède au moins $n+2$ valeurs d'annulation distinctes. En déduire l'existence d'un $\xi \in [-1,1]$ tel que $F^{(n+1)}(\xi) = 0$ et conclure.

3.c En déduire que $\|f - P\| \leq \frac{\|\Pi_{n+1}\|}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|$.

4. Comment doit-on choisir les points $a_0, a_1, \ldots, a_n$ pour que $\|\Pi_{n+1}\|$ soit minimale ?

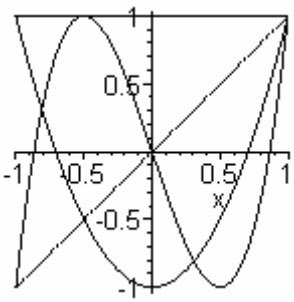
Correction

d'après Ecole de l'Air 1993

Partie I

1.a $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2x^2 - 1$ et $f_3(x) = 4x^3 - 3x$.

1.b $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)$ en posant $\theta = \arccos x$ pour nous alléger la vie. Via $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$, on obtient : $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2\cos\theta\cos n\theta = 2x f_n(x)$.



1.c Unicité : Si T_n et U_n sont solutions alors pour tout $x \in [-1,1]$, $T_n(x) = U_n(x)$ et donc x est racine de $T_n - U_n$. Ce polynôme ayant une

infinité de racines, on peut conclure qu'il est nul et que $T_n = U_n$.
Existence : Raisonnons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$: $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ nous convient à l'extase d'avoir déterminer deux sublimes solutions.
Supposons la propriété établie au rang n et $n-1$ (avec $n \geq 1$).
$f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = T_{n+1}(x)$ en posant $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ qui est bien un polynôme. Récurrence établie.
$T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

2.a Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$, montrons $\deg T_n = n$.
La propriété est vraie, ô joie, aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.
Supposons la propriété établie aux rangs n et $n-1$ (avec $n \geq 1$).
$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ avec $\deg 2XT_n = n+1$ et $\deg T_{n-1} = n-1$. Par somme de polynôme de degré distincts : $\deg T_{n+1} = \max(\deg(2XT_n), \deg(T_{n-1})) = n+1$. Récurrence établie.
Notons
Les coefficients dominants de T_0 et T_1 valent 1.
Pour $n \geq 1$, on voit par l'étude ci-dessus on voit que le coefficient dominant de T_{n+1} est le double de celui de T_n. On peut donc conclure que le coefficient dominant de T_0 vaut 1 et celui de T_n vaut 2^{n-1} pour $n \geq 1$.

2.b Soit $x \in [-1,1]$ une racine de T_n. Pour $\theta = \arccos x \in [0,\pi]$ on a $x = \cos\theta$ et $T_n(x) = \cos n\theta = 0$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ puis $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$. Sachant $\theta \in [0,\pi]$, on peut affirmer $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.
Ainsi $x = \cos\frac{\pi}{2n}, \cos\frac{3\pi}{2n}, \ldots,$ ou $\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$.
Inversement, on vérifie aisément que, ces éléments sont des racines de T_n dans $[-1,1]$. Ainsi les racines de T_n dans $[-1,1]$ sont exactement les $x_0,\ldots,x_{n-1}$ avec $x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$. Pour $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ les $\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont des éléments deux à deux distincts de $[0,\pi]$. La fonction cosinus étant injective sur $[0,\pi]$, on peut dire que les $x_0,\ldots,x_{n-1}$ sont deux à deux distincts. Le polynôme T_n possède donc exactement n racines dans l'intervalle $[-1,1]$. Or $\deg T_n = n$, on peut donc affirmer qu'il n'y a pas d'autres racines et que ces dernières sont simples.

2.c Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$, montrons que T_n et n ont même parité.
Pour $n = 0$ ou $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie aux rangs n et $n-1$ (avec $n \geq 1$)
Si n est pair alors T_n est pair, T_{n-1} impair et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ est impair.
Si n est impair alors T_n est impair, T_{n-1} pair et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ est pair.
Récurrence établie.

3.a $T_n(\cos\theta) = f_n(\cos\theta) = \cos(n\arccos(\cos\theta)) = \cos(n\theta)$ que $\theta \in [0,\pi]$ ou par parité que $\theta \in [-\pi,0]$ ou encore par périodicité que $\theta \in \mathbb{R}$.
La deuxième relation s'établit par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$: ok.
Supposons la propriété établie aux rangs n et $n-1$ (avec $n \geq 1$)
$T_{n+1}(\operatorname{ch}\theta) = 2\operatorname{ch}\theta \operatorname{ch} n\theta - \operatorname{ch}(n-1)\theta$ or $\operatorname{ch}(n+1)\theta + \operatorname{ch}(n-1)\theta = 2\operatorname{ch}\theta \operatorname{ch} n\theta$ donc
$T_{n+1}(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n+1)\theta$.
Récurrence établie.

3.b Si $|x|\leq 1$ alors $T_n(x)=f_n(x)=\cos(n\arccos x)\in[-1,1]$.

Si $x>1$ alors il existe $\theta>0$ tel que $x=\operatorname{ch}\theta$ et alors $T_n(x)=\operatorname{ch} n\theta>1$ donc $|T_n(x)|>1$.

Par raison de parité : si $x<-1$ alors $|T_n(x)|>1$.

4. L'équation $|T_n(x)|=1$ ne peut avoir de solution que dans $[-1,1]$.

Soit $x\in[-1,1]$ solution de cette équation.

Il existe un unique $\theta\in[0,\pi]$ tel que $x=\cos\theta$.

$|T_n(x)|=1$ donne alors $|\cos n\theta|=1$ donc $\exists k\in\mathbb{Z}, n\theta=k\pi$ i.e. $\theta=k\pi/n$.

Or $\theta\in[0,\pi]$ donc $k\in\{0,\dots,n\}$ et finalement x est l'un des $\cos\dfrac{k\pi}{n}$ avec $k\in\{0,\dots,n\}$. Inversement, ces éléments sont bien racines de l'équation $|T_n(x)|=1$. Posons $a_k=\cos\dfrac{k\pi}{n}$. On observe : $-1=a_n<a_{n-1}<\cdots<a_1<a_0=1$. Il y a donc exactement $n+1$ solutions et les solutions des équations $T_n(x)=1$ sont alternées avec les solutions de l'équation $T_n(x)=-1$ car $T_n(a_k)=\cos(k\pi)=(-1)^k$.

5.a Par ce qui précède $\|T_n\|=1$ car $\forall x\in[-1,1], |T_n(x)|\leq 1$ et que $T_n(1)=1$.

Par suite $\left\|\tilde{T}_n\right\|=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

5.b $\tilde{T}_n$ et P sont unitaires et de degré n donc $\deg D<n$.

5.c $D(\cos\dfrac{k\pi}{n})=\dfrac{(-1)^k}{2^{n-1}}-P(\cos\dfrac{k\pi}{n})$.

Si k est pair alors $D(\cos\dfrac{k\pi}{n})=\dfrac{1}{2^{n-1}}-P(\cos\dfrac{k\pi}{n})\geq\dfrac{1}{2^{n-1}}-\|P\|>0$.

Si k est impair alors $D(\cos\dfrac{k\pi}{n})=\dfrac{-1}{2^{n-1}}-P(\cos\dfrac{k\pi}{n})\leq\dfrac{-1}{2^{n-1}}+\|P\|<0$.

Pour $k\in\{0,\dots,n\}$ les $\cos\dfrac{k\pi}{n}$ sont des valeurs successives entre lesquelles la fonction D change de signe, or celle-ci est continue donc elle s'annule entre ces valeurs successives : cela fournit au moins n annulations du polynôme D or $\deg D<n$ donc $D=0$ et $P=\tilde{T}_n$ ce qui est absurde puisque $\|P\|<\left\|\tilde{T}_n\right\|$.

Partie II

1.a $\deg L_k=n$.

1.b Les racines de L_k sont les $a_0,\dots,\hat{a}_k,\dots,a_n$ donc $L_k(a_i)=0$ pour $i\neq k$.

$L_k(a_k)=\displaystyle\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{a_k-a_j}{a_k-a_j}=1.$

1.c Supposons $\lambda_0L_0+\cdots+\lambda_nL_n=0$. En évaluant cette en relation en a_k on obtient : $\lambda_k=0$. La famille $(L_0,\dots,L_n)$ est donc libre or elle est constituée de $n+1=\dim\mathbb{R}_n[X]$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. $P(a_i)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f(a_k)L_k(a_i)=\sum_{k=0}^{n}f(a_k)\delta_{k,i}=f(a_i)$ donc P est bien solution du problème posé. Si Q en est une autre solution alors $P(a_i)=Q(a_i)$ donc a_i racine de $P-Q$. Cela fournit au moins $n+1$ racines de $P-Q$ alors que $P-Q\in\mathbb{R}_n[X]$ donc $P-Q=0$ i.e. $P=Q$.

3.a Si $x\in\{a_0,\dots,a_n\}$ alors $\Pi_{n+1}(x)=0$ et $f(x)=P(x)$ donc n'importe quel ξ convient.

3.b Si $x\notin\{a_0,\dots,a_n\}$ alors $\Pi_{n+1}(x)\neq 0$ et $K=\dfrac{P(x)-f(x)}{\Pi_{n+1}(x)}$ convient

F s'annule alors en $a_0,\dots,a_n$ et aussi en x : cela fournit $n+2$ annulations. Par application du théorème

de Rolle, F' s'annule au moins $n+1$ fois, F'' au moins n fois,…, $F^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois d'où l'existence d'un $\xi \in [-1,1]$ tel que $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. Or $F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P^{(n+1)}(\xi) - K\Pi_{n+1}^{(n+1)}(\xi)$ avec $P^{(n+1)} = 0$ car $\deg P \leq n$ et $\Pi_{n+1}^{(n+1)} = (n+1)!$ car Π_{n+1} est unitaire et de degré $n+1$. On conclut alors : $f^{(n+1)}(\xi) = K(n+1)!$ puis la relation voulue.

3.c Pour tout $x \in [-1,1]$, $|f(x) - P(x)| \leq \dfrac{|\Pi_{n+1}(x)|}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \leq \dfrac{\|\Pi_{n+1}\|}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|$ t donc

$\|f - P\| = \sup\limits_{[-1,1]}|f(x) - P(x)| \leq \dfrac{\|\Pi_{n+1}\|}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|$.

4. $\Pi_{n+1} \in P_{n+1}$. Compte tenu de la partie I, $\|\Pi_{n+1}\|$ sera s'il est égal à $\Pi_{n+1} = \tilde{T}_{n+1}$ ce qui est obtenu en prenant $a_0,\ldots,a_n$ les racines de T_{n+1} à savoir les $\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$ avec $k \in \{0,\ldots,n\}$.